LOBACHEVSKIY GEOMETRIYASINING BA'ZI MASALALARI TAHLILI

Nuritdinov Jalolxon Tursunboy òĝli,
Qòqon davlat pedagogika instituti Matematika kafedra òqituvchisi
Sharifjonova Malikabonu Shuhratjon qizi,
Qòqon davlat pedagogika instituti Matematika va Informatika yònalishi talabasi

Annotatsiya: Ushbu ish Lobachevskiy tomonidan taklif etilgan noevklidiy geometriya asosidagi masalalarni o‘rganishga bag‘ishlangan. Lobachevskiy geometriyasi an’anaviy Evklid geometriyasidan farqli ravishda, parallellik aksiomasi bilan bog‘liq tamoyillarni qayta ko‘rib chiqadi va ko‘p hollarda Euklid geometriyasidan o‘ziga xos yondashuv talab qiladi. Ushbu ishda noevklidiy geometriyaning asosiy tushunchalari, shu jumladan, to'g'ri chiziqlar, burchaklar va yassi fazolardagi parallelizm tamoyillari muhokama qilinadi. Shuningdek, Lobachevskiy geometriyasining zamonaviy fan va texnologiyadagi amaliy qo‘llanmalari, xususan, astrofizika, kosmologiya va relativistik mexanika kabi sohalarda qanday qo‘llanilayotgani tahlil qilinadi. Mazkur tahlil davomida geometrik obyektlar va ularning xossalari noevklidiy fazoda qanday o‘zgarishi va buning natijasida an’anaviy geometriya tamoyillarining kengayishi ko‘rsatib o‘tiladi. Ushbu ishning maqsadi – talabalarni Lobachevskiy geometriyasi bilan tanishtirish va ushbu noan’anaviy yondashuvning ilm-fanga qo‘shgan hissasini anglashlariga yordam berishdir.

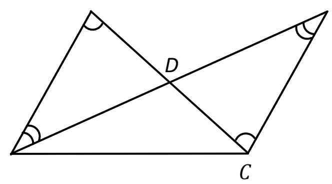
Kalit so‘zlar: Lobachevskiy geometriyasi, noevklidiy geometriya, parallellik aksiomasi, to'g'ri chiziqlar, burchaklar, relativistik mexanika, kosmologiya, astrofizika, fazo tahlili.

Biz Evklid postulatining uchburchak burchaklari yig’indisi ikkita to’g’ri burchakka tengligini, Lobachevskiy postulati esa – bu yig’indi ikkita to’g’ri burchakdan kichik degan farazga teng kuchli ekanligini ko’rsatamiz.

1-masala. Uchburchak burchaklari yig’indisi ikkita to’g’ri burchakdan katta bo’la olmasligini isbotlang.

Ye ch i l i sh i. Aytaylik, ABC uchburchak ichki burchaklari yig’indisi $2d+\alpha$ ga teng bo’lsin (1.1.4-rasm). Bunda $<BAC=\alpha$

- bu uchburchakning eng kichik burchagi A



(xususiy holda,

1.1.4-rasm

agar ABC – teng tomonli yoki asosi yon tomonidan katta bo’lgan teng yonli uchburchak bo’lsa, u holda α - uning teng burchaklaridan biri).

Qarama-qarshi tomoniga AD medianani o’tkazamiz va bu medianaga teng DB_1 kesmani chizamiz. ABD va BDC_1 uchburchaklarning tengligidan

$$<DBC_1=<DAB,\ <DCB_1=<DBA.$$

Shunday qilib, ABC_1 uchburchak (uni birinchi chiqarilgan uchburchak deb ataymiz) burchaklari yig’indisi $2d_{+\mu}$ ga teng, dastlabki uchburchakning ikkilangan medianasi chekka nuqtasi

uchidagi ikkita burchagi yig’indisi α ga, eng kichik burchak esa $\leq\alpha/2$

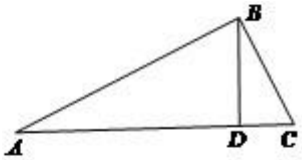
bo’ladi. Birinchi chiqarilgan uchburchakdan analogik ravishda ikkinchi uchburchakni quramiz: uning eng kichik burchagini olamiz, qarshisida yotgan tomoni mediana o’tkazamiz va h.k. Shunday holda olingan ikkinchi uchburchakda burchaklar yig’indisi $2d_{+\mu}$ ga teng, birinchi chiqarilgan uchburchakning ikkilangan medianasi uchudagi burchaklari yig’indisi $\le\alpha/2$ ga teng, eng kichik burchak esa $\le \alpha/4$ bo’ladi. Bu jarayonni davom ettirib, qator keltirilgan uchburchaklarni olish mumkin; *n*-uchburchakda burchaklar yig’indisi $2d+\mu$ ga, $(n-1)$keltirilgan uchburchak ikkilangan medianasi uchlaridagi burchaklari yig’ndisi esa $\le\alpha/2^*n\text{-}1$ bo’ladi. Agar n ni yetarlicha katta olinsa, u holda 2 α/2*n-1 ni μ dan kichik qilish mumkin, ya’ni bu uchburchakning uchinchi burchagi $2d$ dan katta bo’ladi; biz qarama-qarshilikka uchradik.

2-masala. Agar qandaydir uchburchakda burchaklar yig’indisi 2d ga teng bo’lsa, u holda bu boshqa uchburchakalar uchun ham o’rinli bo’ladi.

Ye ch i l i sh i. Qulaylik uchun *ABC* uchburchak burchaklari yig’indisini S_{ABC} orqali belgilashga kelishib olamiz. *ABC* uchburchakda (1.1.5-rasm) burchaklari yig’indisi *2d* ga teng bo’lsin, u holda ikkita burchak, masalan $\angle A$ va $\angle C$ - o’tkirdir, *B* uchdan tushurilgan *BD* balandlik shu uchburchak ichidan o’tishini ko’rsatish qiyin emas, ya’ni uni ikki to’g’ri burchakli uchburchakka bo’ladi.

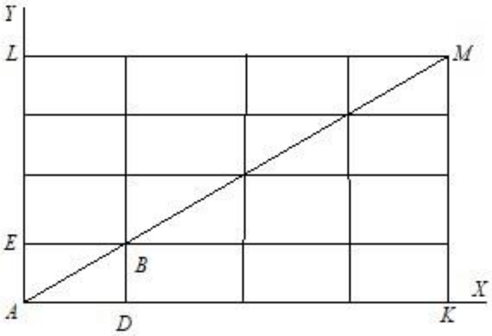
$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{DBC} - 2d$ munosabatni hisobga olib va avvalgi masalani e’tiborga olgan holda

$S_{ABC} = S_{ABD} = 2d$ bo’lishini hosil qilamiz.



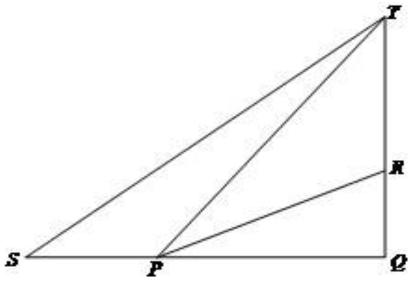
1.1.5-rasm

Endi, har bir to’g’ri burchakli uchburchakda burchaklar yig’indisi *2d* ga teng bo’lishini ko’rsatamiz. Buning uchun *ABD* uchburchakni olamiz va uni o’ziga teng, *E* uchudagi burchagi to’g’ri burchak va katetlari *AE= BD*va *EB =AD* bo’lgan *AEB* uchburchakni yasash yordamida to’g’ri to’rtburchakkacha to’ldiramiz (1.1.6-rasm).



1.1.6-rasm

Bu *AEBD* to’g’ri to’rtburchakda burchaklar yig’ndisi *4d* ga teng. *AD* tomonni *AX* to’g’ri chiziq bo’ylab *n* marta, *AE* tomonni *AY* to’g’ri chiziq bo’ylab *n* marta cho’zib, bir to’g’ri to’rtburchak ustiga *AEBD* ga teng bo’lgan boshqasini joylashtirib, *AEBD* ga teng n^2 to’g’ri to’rtburchaklardan tfshkil topgan *ALMK* to’g’ri to’rtburchakni hosil qilamiz. *ALMK* to’g’ri to’rtburchakda ham burchaklar yig’indisi *4d* ga teng. *AM* diagonal bu to’g’ri to’rtburchakni ikkita to’g’ri burchakli uchburchakka bo’lib, ularning har birida burchaklar yig’indisi *2d* ga teng (1-masalaga asosan). *n* ni etarlicha katta olib, katetlari berilgan *PQR* to’g’ri burchakli uchburchak katetlaridan katta bo’lgan *AMK* to’g’ri burchakli uchburchakni hosil qilamiz (1.1.7-rasm).



1.1.7-rasm

Agar *QT =KM* , *QS =AK* deb olsak, *AMK* uchburchakkaga teng bo’lgan *STQ* uchburchak hosil bo’ladi. *PT* kesma *STQ uchburchakni* ikkita uchburchakka bo’ladi va

$$SSQT=SSPT+SPTQ-2d$$

ekanligidan $S_{SPT}+S_{PTQ}=4d$ bo'lib, $S_{SPT}=S_{PTQ}=2d$ ekanligi kelib chiqadi. Xuddi shu mulohazalarni *PTQ* uchburchak va *PR* kesma uchun bajarib, $S_{PQR}=2d$ ekanligini topamiz.

Shunday qilib, har bir to'g'ri burchakli uchburchakda burchaklar yig'indisi *2d* ga teng ekan. Biroq biz yuqorida har bir uchburchak ikkita to'g'ri burchakli uchburchakka bo'linishini ko'rdik. Shundan ixtiyoriy uchburchakda burchaklar yig'indisi *2d* ga tengligini hosil qilamiz.

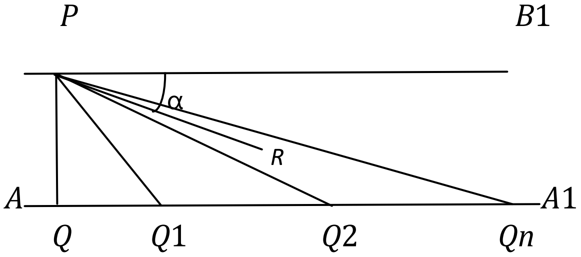
Shunday qilib, faqat ikkita taxminni qilishimiz mumkin: yoki barcha uchburchaklarda burchaklar yig'indisi *2d* ga teng, yoki barchasida u *2d* dan kichik.

Endi uchburchak burchaklari yig'indisi haqidagi masalaning parallellik postulati bilan bog'liqligini topamiz.

3-Masala. Agar uchburchak burchaklari yig'indisi 2d ga teng bo'lsa, Evklid postulati o'rinli, agar u 2d dan kichik bo'lsa, Lobachevskiy postulati o'rinlidir.

Bunga teskari fikr ham o'rinlidir.

Ye ch i l i sh i. Eng avval uchburchak burchaklari yig'indisi *2d* ga teng bo'lsa, *AA*1 to'g'ri chiziqda yotmagan *P* nuqta orqali (1.1.8-rasm) *BB*1 to'g'ri chiziq bilan etarlicha kichik burchak hosil qiluvchi va *AA*1 ni kesib o'tuvchi to'g'ri chiziqni o'tkazish mumkinligini ko'rsatamiz (*AA*1 va *BB*1 to'g'ri chiziqlar *PQ* ga perpendikulyar).

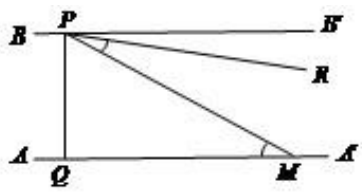


1.1.8-rasm

Buning uchun *QQ1= PQ* kesma quramiz; u holda < *B'PQ*=d/2 Ushbu ∡ —
*Q1Q2= PQ*1 kesmani o'tkazamiz; u holda <*B'PQ2*=d/4. Shundan keyin bu 2
jarayonni davom ettiramiz: $Q_2Q_3=PQ_2$, $Q_3Q_4=PQ_3$, ..., $Q_{n-1}Q_n=PQ_{n-1}$ kesmalarni quramiz. Natijada PQ_3, PQ_4, ..., PQ_n nurlarni hosil qilamiz va ular *PB*' nur bilan $d/8$, $d/16$, ..., $d/2n$ burchaklarni hosil qiladi. *n* ning
kattalashishi bilan, ixtiyoriy berilgan burchakdan kichik burchak olishimiz mumkin. Endi Evklid postulatini isbotlash oson. Faraz qilaylik, *PR* nur *PB*' nur bilan α burchak hosil qilsin. *n* ni etarlicha katta tanlab ($d/2<\alpha$
bo'ladigan qilib), PQQ_n uchburchakni hosil qilamiz. Bunda *PR* nur QPQ_n burchakning ichidan o'tadi, ya'ni QQ_n tomonni kesadi.

Endi uchburchak burchaklari yig'indisi *2d* dan kichik degan farazni ko'rib chiqamiz. *BB*' dan farqli, *P* nuqta orqli o'tuvchi va *AA*' ni kesmaydigan to'g'ri chiziqlar mavjudligini ko'rsatamiz.

AA' da yotuvchi *M* nuqtani *P* bilan tutashtiramiz (1.1.9-rasm) va *PR* nurni shunday o'tkazamizki, bunda <*MPR* burchak <*PMQ* burchakka teng bo'lsin.



1.1.9-rasm

Uchburchak burchaklari yig'ndisi haqidagi taxminlardan

$<MPB'> <PMQ$ ekanligi kelib chiqadi, ya'ni PR nur $<MPB'$ burchak ichidan o'tadi; bu nur AA' ni kesmaydi, aks holda tashqi burchagi QMP ichki (MPR) ga teng bo'lgan uchburchak hosil bo'lar edi.

Shunday qilib, masalaning birinchi yarmi yechildi, undan esa teskari xulosa kelib chiqadi.

3-masala yordamida o'quvchi Evklid va Lobachevskiy postulatlarini ta'riflashda kuchsizroq talablar bilan chegaralanish mumkinligini ko'rsatishi mumkin. Masalan, Evklid postulatini quyidagicha ta'riflash mumkin: to'g'ri chiziq a va unda yotmagan P nuqta mavjud bo'lib, bu to'g'ri chiziq va nuqta bilan aniqlanadigan tekislikga P nuqta orqali a bilan kesishmaydigan bittadan ko'p bo'lmagan to'g'ri chiziq o'tadi.

Lobachevskiy geometriyasida uchburchak burchaklari yig'indisi $2d$ dan kichikligini hisobga olgan holda, $2d$ va bu uchburchak burchaklari yig'indisi orasidagi farqqa teng bo'lgan uchburchak nuqsoni (defekt) haqidagi tushunchani kiritamiz:

$$DABC = 2d - SABC$$

Agar BD kesma ABC uchburchakni ABD va DBC uchburchaklarga bo'lsa,

$$DABC = DABD + DDBC$$

ekanligini ko'rish qiyin emas,

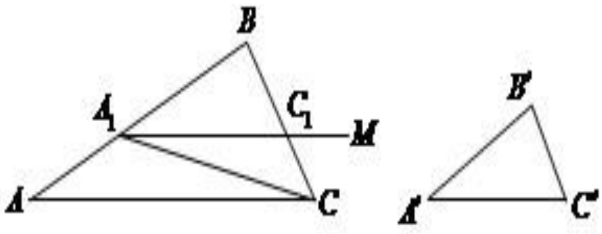
n-burchak uchun nuqson (defekt) $2\ d(n-2)$ va uning burchaklari yig'indisi orasidagi farq kabi kiritiladi. Umuman olganda, agar ko'pburchakni siniq chiziqlar yordamida bir nechta ko'pburchaklarga bo'lsak, u holda ko'pburchak nuqsoni (defekt) uning bo'laklari nuqsonlari yig'indisiga tengligini isbotlash mumkin.

Parallellik postulatining shunday shakllarining mavjudligi haqidagi masala bilan bo'liqligi haqidagi masalaga o'tamiz. Bunday shakllar faqat Evklid postulati to'g'ri bo'lgandagina mavjud bo'lishini ko'rsatamiz.

4-masala. Agar ikkita o'xshash uchburchak mavjud bo'lsa, u xolda Evklid postulati o'rinli bo'ladi.

Ye ch i l i sh i. ABC va $A'B'C'$ uchburchakda burchaklar jufti tengdir: $<A=<A'$ $<B=B'$,$<C=$,$<C'$ biroq tomonlari $AB > A'B'$

AB tomonida A_1B kesma belgilaymiz va burchak $BAM_1 = <A$ ostiga A_1M to'g'ri chiziqni o'tkazamiz(1.1.10-rasm). A_1M to'g'ri chiziq AC ni



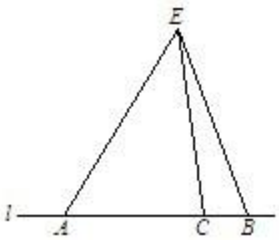
1.1.10-rasm kesmasligidan,

u C_1 nuqtada BC ni kesadi. Uchburchak ABC_1 = uchburchak $ABC1$ ekanligidan, $AACC_{1\ 1}$ to'rtburchakda burchaklar yig'indisi $4d$ tengdir. Uni diagonal tarzda ikkiga uchburchakka bo'lib, ularning har biridagi burchaklar yig'indisi $2d$ ga tengligiga erishamiz, ya'ni Evklid postulati o'rinlidir.

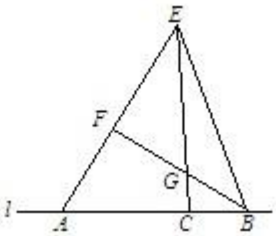
1.2. Chizg'ich yordamida yasash

5-masala. l to'g'ri chiziqda uchta turli A, B va C nuqtalar berilgan. A, B nuqtalar juftini C nuqta bilan birga garmonik tarzda bo'luvchi D nuqtani yasang.

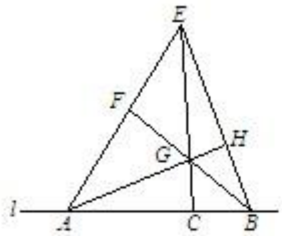
Ye ch i l i sh i. To'liq to'rtburchakning garmonik xossalarni qo'llashga asoslangan yasash g'oyasi ma'lum. Berilgan masalaning muhimligini hisobga olib yasashning barcha bosqichlarini to'liq ko'rib chiqamiz.



1.2.1-rasm



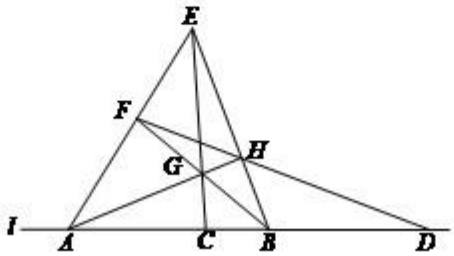
1.2.2 -rasm



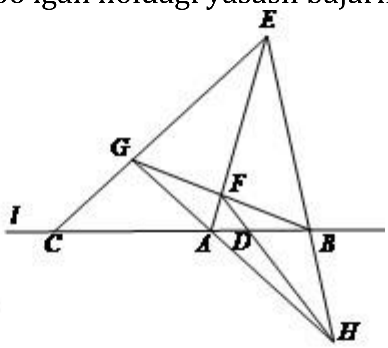
1.2.3 -rasm

l to’g’ri chiziqdan tashqarida ixtiyoriy *E* nuqtani olamiz va *AE, BE* va *CE* to’g’ri chiziqlarni o’tkazamiz (1.2.1-rasm). *AE* da *A* va *E* dan farqli bo’lgan *F* nuqtani olamiz va *CE* ni *G* nuqtada kesib o’tuvchi *BF* to’g’ri chiziqni o’tkazamiz (1.2.2-rasm). *BE* ni *H* nuqtada kesuvchi *AG* to’g’ri chiziq o’tkazamiz (1.2.3-rasm). *FH* to’g’ri chiziq *l* ni izlanayotgan *D* nuqtada kesib o’tadi (1.2.4-rasim).

1.2.5-rasmda *C* nuqta *AB* kesmadan tashqarida bo’lgan holdagi yasash bajarilgan.



1.2.4-rasm



1.2.5-rasm

6-masala. Bir dastaga tegishli a, b, c turli to’g’ri chiziqlar berilgan. a, b to’g’ri chiziqlar juftini c bilan birga garmonik tarzda ajratuvchi d to’g’ri chiziq yasalsin.

Ye ch i l i sh i. Dasta markazidan, y’ani berilgan to’g’ri chiziqlarning kesishish nuqtasi orqali o’tmaydigan *l* to’g’ri chiziqni o’tkazamiz; *l* ularni mos ravishda *A, B, C* nuqtalarda kesib o’tsin. *C* nuqta bilan birga *A, B* nuqtalarni garmonik tarzda ajratuvchi nuqtani yasaymiz (5-masala) va uni dasta markazi bilan tutashtiramiz.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Mamatov M.SH., Bayturayev A.M., Ibragimov N.Sh. Geometriya asoslaridan masalalar to‘plami. O‘quv qo‘llanma. –T.: “Universitet”, 2019. -130b.
2. Nuritdinov, J. T. (2021). ABOUT THE MINKOWSKI DIFFERENCE OF SQUARES ON A PLANE. Scientific reports of Bukhara State University, 5(3), 13-29.
3. Nuritdinov J. T. On Minkowski difference of triangles. Bull. Inst. Math., 2021, Vol.4, No6, pp. 50-57. [In Uzbek]
4. Mamatov, M. and Nuritdinov, J. (2020) Some Properties of the Sum and Geometric Differences of Minkowski. Journal of Applied Mathematics and Physics, 8, 2241-2255. doi: 10.4236/jamp.2020.810168.
5. Mamatov, M. S., & Nuritdinov, J. T. (2020). On some geometric properties of the difference and the sum of Minkowski. ISJ Theoretical & Applied Science, 06 (86), 601-610. Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-06-86-110
6. Mamatov M. and Nuritdinov J. (2022). Optimizing the Quality of Electric Lighting with the Use of Minkowski’s Geometric Difference. In Proceedings of the 3rd International Symposium on Automation, Information and Computing - Volume 1: ISAIC; ISBN 978-989-758-622-4, SciTePress, pages 751-756. DOI: 10.5220/0012046100003612

7. Mamatov , M., Nuritdinov, J. and Esonov, E. (2021) “Differential games of fractional order with distributed parameters”, International Scientific Technical Journal "Problems of Control and Informatics", 66(4), pp. 38–47. doi: 10.34229/1028-0979-2021-4-4.
8. Nuritdinov J.T. Minkowski difference of cubes. Proceedings of International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME - 2022). Pamukkale University, Denizli, Turkey, 22-24 September 2022; 88-90.
9. Жалолхон Нуритдинов Турсунбой ўғли. (2023). ТЕКИСЛИКДА БЕРИЛГАН ЭЛЛИПСЛАР МИНКОВСКИЙ АЙИРМАСИ. QO‘QON UNIVERSITETI XABARNOMASI, 1(1), 105–113. https://doi.org/10.54613/ku.v1i1.312
10. J.T.Nuritdinov. On the minkowski difference of lines and planes // Modern problems of applied mathematics and information technologies. Al-Khwarizmi 15-17 November, 2021, Fergana, Uzbekistan. pp 252.
11. Abdullayev Axrorjon Axadjon o‘g‘li, & Nuritdinov Jalolxon Tursunboy o‘g‘li. (2023). SANOATNING YAIMGA TA’SIRINI BAHOLASH. QO‘QON UNIVERSITETI XABARNOMASI, 1(1), 290–293. https://doi.org/10.54613/ku.v1i1.439
12. Toshxo‘jayev Abduqodirxon Abdulmansur o‘g‘li, & Nuritdinov Jalolxon Tursunboy o‘g‘li. (2023). O‘ZBEKISTONDA KICHIK BIZNES VA XUSUSIY TADBIRKORLIKDA XIZMAT KO‘RSATISH SOHASINING YALPI ICHKI MAHSULOTDAGI ULUSHI. QO‘QON UNIVERSITETI XABARNOMASI, 1(1), 328–332. https://doi.org/10.54613/ku.v1i1.454
13. Nuritdinov J.T. (2023). YARIM TEKISLIKLAR MINKOVSKIY AYIRMASI. QO‘QON UNIVERSITETI XABARNOMASI, 1(1), 38–40. https://doi.org/10.54613/ku.v1i1.281
14. I. I. Haydarov, & J. T. Nuritdinov. (2023). BENEFIT FROM THE GEOGEBRA PROGRAM IN SOLVING PROBLEMS OF PROJECTIVE GEOMETRY. Open Access Repository, 9(4), 298–302. https://doi.org/10.17605/OSF.IO/KE253
15. J. T. Nuritdinov. (2023). USING THE MAPLE SOFTWARE TOOL IN SOLVING A SYSTEM OF LINEAR EQUATIONS. Open Access Repository, 9(4), 303–307. https://doi.org/10.17605/OSF.IO/U4BHE
16. Nuritdinov Jalolxon Tursunboy o‘g‘li, & Abdullayev Axrorjon Axadjon o‘g‘li. (2023). O‘ZBEKISTONNING JAHON SAVDO TASHKILOTIGA A’ZO BO‘LISH UCHUN UZOQ YO‘LI VA XITOY TAJRIBASI. QO‘QON UNIVERSITETI XABARNOMASI, 1(1), 43–47. https://doi.org/10.54613/ku.v6i6.247