CHEGARALANMAGAN SOHADA TRIKOMI TENGLAMASI UCHUN NOLOKAL CHEGARAVIY SHARTLI CHIZIQLI TESKARI MASALA

[1]Turakulov Xamidullo Shamsidinovich
[1]Qo‘qon davlat pedagogika instituti katta o‘qituvchisi, PhD.
[1]Toshkent davlat texnika universiteti Qo’qon filiali katta o’qituvchisi, PhD.
e-mail: hamidtsh87@gmail.com
[2]Shukurjon Jo’rayev Yusupovich,
[2]QDPI matematika kafedrasi o’qituvchisi,
tel:998200077010 ,
[2]e-mail: shukurjon4756@gmail.com,
[3]Эсонов Мунавваржон Мукимжанович
[3]QDPI matematika kafedrasi katta o’qituvchisi,
[3]e-mail: esonovm@mail.ru,
tel:998905097913

Annotasiya: Chegaralanmagan parallelepiped ko‘rinishdagi sohada uch o‘lchamli Trikomi tenglamasi uchun nolokal chegaraviy shartli chiziqli teskari masalani umumlashgan yechiminining yagonaligi va mavjudligi o‘rganilgan. Yagonalik va mavjudlik teoremalarini isbotlash uchun Furye almashtirishi, "ε-regulyarizatsiya " va aprior baholar usullaridan foydalanilgan.

Kalit so‘zlar: uch o‘lchovli Trikomi tenglamasi, nolakal tipdagi chegaraviy masala, "ε-regulyarizatsiyasi", aprior baholar usullari, ketma-ket yaqinlashish, Furye almashtirishi.

Аннотация. В данной статье рассматриваются вопросы корректности одной линейной обратной задачи для трёхмерного уравнения Трикоми в области неограниченного вида параллелепипеда. В этой статье задача рассматривается следующими методами: «ε —-регуляризации», априорных оценок, последовательностью приближений с применением преоброзования Фурье доказаны теоремы существования и единственности обобщенного решения одной линейной обратной задаче с нелокальными краевыми условиями в определенном классе интегрируемых функции.

Ключевые слова: трехмерная уравнения Трикоми, линейная обратная задача с нелокальными краевыми условиями, корректность задачи, методы «ε — регуляризации», априорные оценки, последовательность приближения, преоброзования Фурье.

Abstract. This article discusses the correctness of one linear inverse problem for the three-dimensional Tricomi equation in a prismatic unbounded domain. For this problem, the existence and uniqueness theorems for a generalized solution to one linear inverse problem with a semi-nonlocal boundary condition in a certain class of integrals functions are proved by the methods of "ε —regularization", a priori estimates, a sequence of approximations using the Fourier transform.

Keywords: three-dimensional Trikomi equations, linear inverse problem with a semi-nonlocal boundary condition, problem correctness, methods “ε —regularization”, a priori estimates, sequence of approximation, Fourier transforms

Введение и постановка задачи.

В процессе исследования нелокальных задач была выявлена тесная взаимосвязь задач с нелокальными краевыми условиями и обратными задачами. К настоящему времени достаточно хорошо изучены обратные задачи для классических уравнений таких как, параболических, эллиптических и гиперболических типов. [1,2,3]. Для уравнений смешанного типа, как первого, так и второго рода в ограниченных областях изучено в работах. [4,5].

Значительно менее изученными являются обратные задачи для уравнений смешанного типа (в частности для уравнения Трикоми) в неограниченных областях [3,4]. Частично восполнить данный пробел мы и попытаемся в рамках этой работы.

В данной работе, для исследования однозначное разрешимости обратных задач для трехмерного уравнения Трикоми в неограниченной призматической области предлагается метод, который основан на сведение обратной задачи к прямым нелокальным краевым задачам для семейство нагруженных интегро-дифференциальных уравнений Трикоми в ограниченной прямоугольной области [4,5].

Напомним, что нагруженным уравнением принято называть уравнение с частными производными, содержащее в коэффициентах или в правой части значения тех или иных функционалов от решения уравнения [5].

В области

$$G=(-1,1)\times(0,T)\times R=Q\ \times R=\{(x,t,z);x\in(-1,1),0<t<T<+\infty,z\in R\}$$

рассмотрим трехмерное уравнение Трикоми:

$$Lu=xu_{tt}-\Delta u+a(x)u_t+c(x,t)u=\psi(x,t,z), \tag{1}$$

где $\Delta u=u_{xx}+u_{zz}$ - оператор Лапласа. Здесь $\psi(x,t,z)=g(x,t,z)+h(x,t)\cdot f(x,t,z)$, $g(x,t,z)$ и $f(x,t,z)$ -заданные функции, а функция $h(x,t)$ подлежит определению.

В дальнейшем для решения поставленных задач нам необходимо ввести определений несколько функциональных пространств и обозначения.

Обозначим через

$$\hat{u}(x,t,\lambda)=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,t,z)e^{-i\lambda z}dz$$

преобразование Фурье по переменной z, функции $u(x,t,z)$, а через

$$u(x,t,z)=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{u}(x,t,\lambda)e^{i\lambda z}d\lambda$$

обратное преобразование Фурье. Теперь с помощью преобразования Фурье определим пространство $W_2^{l,s}(G)$ с нормой

$$\|u\|^2_{W_2^{l,s}(G)}=(2\pi)^{-1/2}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}(1+|\lambda|^2)^s\cdot\|\hat{u}(x,t,\lambda)\|^2_{W_2^l(Q)}d\lambda, \tag{A}$$

где $s,l-$любые конечные положительные целые числа.

Через $W_2^l(Q)$ (при $l=0, W_2^0(Q)=L_2(Q)$) определяется пространства Соболева со скалярным произведением $(u,\vartheta)_l$ и нормой

$$\|\vartheta\|_l^2=\|\vartheta\|^2_{W_2^l(Q)}=\sum_{|\alpha|\le l}\int_Q|D^\alpha\vartheta|^2dxdt.$$

Здесь

α – мультииндекс, D^{α} – обобщённая производная по переменным x и t.

Очевидно, что пространство $W_2^{l,s}(G)$ с нормой (A) является гильбертовым пространством [2-5].

Линейная обратная задача. Найти функции $(u(x,t,z), h(x,t))$ удовлетворяющие уравнению (1) в области Q, такие что, функция $u(x,t,z)$ удовлетворяет следующим нелокальным краевым условиям

$$\gamma D_t^p u\big|_{t=0} = D_t^p u\big|_{t=T}, \tag{2}$$

$$\eta D_x^p u\big|_{x=-1} = D_x^p u\big|_{x=1}, \tag{3}$$

при $p=0,1$, где $D_t^p u = \dfrac{\partial^p u}{\partial t^p}$, $D_t^0 u = u$, γ,η – некоторые постоянные числа, отличные от нуля, величины которых будут уточнены ниже,

Далее будем считать, что $u(x,t,z)$ и $u_z(x,t,z)\to 0$ при $|z|\to\infty$, $u(x,t,z)$ абсолютно интегрируема по z на R при любом (x,t) в $\overline{Q}$ (4)

с дополнительному условию

$$u(x,t,\ell_0)=\varphi_0(x,t), \text{ где } \ell_0\in R \tag{5}$$

и с функций $h(x,t)$ принадлежит классу

$$U=\left\{(u,h)\big|\, u\in W_2^{2,s}(G); h\in W_2^2(Q), s\ge 3\right\}.$$

Определение 1. Обобщённым решением задачи (1)-(5) будем называть функцию $u(x,t,z)\in U$, удовлетворяющую уравнению (1) почти всюду, с условиями (2)-(5)

Пусть все коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие функции в области G, и пусть выполнены следующие условия относительно коэффициентов и правой части уравнение (1), и заданной функции $\varphi_0(x,t)$;

Условие 1:

периодичность: $c(x,0)=c(x,T)$, для всех $x\in[-1,1]$.

нелокальные условие: $\gamma\cdot g(x,0,z)=g(x,T,z)$, $\gamma\cdot f(x,0,z)=f(x,T,z)$,

гладкость: $f(x,t,l_0)=f_0(x,t)\in C_{x,t}^{0,1}(Q), \left|f_0(x,t)\right|\ge\eta>0;\ f\in W_2^{3,s}(G), g\in W_2^{1,s}(G).$

Условие 2:

$\varphi_0(x,t)\in W_2^4(Q);\ \gamma D_t^q\varphi_0\big|_{t=0}=D_t^q\varphi_0\big|_{t=T}, q=0,1,2;\ \eta D_x^p\varphi_0\big|_{x=-1}=D_x^p\varphi_0\big|_{x=1}, p=0,1.$

Однозначное разрешимость задачи (1)-(5) докажем с помощью преобразованием Фурье, т.е для нахождение решение задачи (1)-(5), применяем преобразование Фурье по переменной z, для задачи (1)-(5).

Для того чтобы сформулировать основной результат, необходимо выполнить некоторые формальности построения.

Рассмотрим следы уравнения (1) при $z=\ell_0$:

$$Lu(x,t,\ell_0)=xu_{tt}(x,t,\ell_0)-u_{xx}(x,t,\ell_0)-u_{zz}(x,t,\ell_0)+$$
$$+a(x)u_t(x,t,\ell_0)+c(x,t)u(x,t,\ell_0)=\psi(x,t,\ell_0).$$

Теперь, учитывая условие (5) и то, что $f_0 \neq 0$, определим формально неизвестную функцию $h(x,t)$ в виде интеграла

$$h(x,t)=\frac{1}{f_0(x,t)}[\Phi_0+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda^2 e^{i\lambda\ell_0}\hat{u}(x,t,\lambda)d\lambda]$$

где $\Phi_0=L_0\varphi_0-g_0$; $L_0\varphi_0=x\varphi_{0tt}-\varphi_{0xx}+a(x)\varphi_{0t}+c(x,t)\varphi_0$, а для определения функций $\hat{u}(x,t,\lambda)$, в области $Q=(-1,1)\times(0,T)$ получим нагруженных интегро-дифференциальных уравнений Трикоми:

$$L\hat{u}=x\hat{u}_{tt}-\hat{u}_{xx}+a(x)\hat{u}_t+(c(x,t)+\lambda^2)\hat{u}=\hat{g}(x,t,\lambda)+$$
$$+\frac{\hat{f}(x,t,\lambda)}{f_0(x,t)}[\Phi_0+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\xi^2 e^{i\lambda\ell_0}\hat{u}(x,t,\xi)d\xi]\equiv\hat{F}(\hat{u}), \quad (6)$$

с нелокальными краевыми

$$\gamma D_t^p\hat{u}\big|_{t=0}=D_t^p\hat{u}\big|_{t=T};\ p=0,1 \quad (7)$$
$$\eta D_x^p\hat{u}\big|_{x=-1}=D_x^p\hat{u}\big|_{x=1};\ p=0,1, \quad (8)$$

где, $\lambda\in R=(-\infty,\infty)$, $\hat{f}(x,t,\lambda)=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,t,z)e^{-i\lambda z}dz$

-преобразование Фурье по переменной z, функции $f(x,t,z)$.

Теорема: (Основной результат). Пусть выполнены вышеуказанные условия 1 и 2 для коэффициентов уравнение (1), кроме того пусть $2a(x)+\mu x\geq B_1>0$, $\mu c(x,t)-c_t(x,t)\geq b_2>0$, для всех $x\in\overline{Q}$, где $\mu=\frac{2}{T}\ln|\gamma|>0$, $|\gamma|>1$, $|\eta|\geq 1$, $c(x,0)=c(x,T)$, для всех $x\in[-1,1]$, и пусть далее существует положительные числа $\sigma, c(\sigma^{-1})$ – (коэффициенты неравенство Коши)

такие, что для $b_0=\min\{B_1,\mu,b_2\}$ имеют место оценки $b_0-c(\sigma^{-1})=\delta>0$, $c(\sigma^{-1})=14\mu^2\sigma^{-1}>0$, где $M\|f\|^2_{W_2^{3,s}(G)}<\frac{1}{2}$, где $M=const(\sigma\mu^2 m\delta^{-1}\eta^{-2}\|f_0\|_{C^{0,1}_{x,t}(Q)})$

$m=10c_1c_2c_3$, $c_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\lambda^4 d\lambda}{(1+|\lambda|^2)^s}<+\infty, s\geq 3$, $c_i(i=2,3)$ – коэффициенты теоремы вложения Соболева.

Тогда функции $u(x,t,z)=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{u}(x,t,\lambda)e^{i\lambda z}d\lambda,$ (9)

$$h(x,t)=\frac{1}{f_0(x,t)}[\Phi_0+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda^2 e^{i\lambda\ell_0}\hat{u}(x,t,\lambda)d\lambda] \quad (10)$$

являются единственным решением линейной обратной задачи (1)-(5) из указанного класса U.

Библиографический список

1. Джамалов С.З., Ашуров Р.Р., Туракулов Х.Ш. Об одной нелокальной краевой задаче периодического типа для трехмерного уравнения Трикоми в неограниченной призматической области. // Бюллетень Института математики. 2021. №3. с.10-19.
2. Dzhamalov S.Z., Ashurov R.R., Turakulov Kh.Sh. The Linear Inverse Problem for the Three- Dimensional Tricomi Equation in a Prismatic Unbounded Domain. // Lobachevskii journal of mathematics. 2021. Vol. 42(15), P. 3606-3615. (Scopus. IF=0.378).
3. Dzhamalov S.Z., Aliev M.G., Turakulov Kh.Sh. On a linear inverse problem for the three-dimensional Tricomi equation with nonlocal boundary conditions of periodic type in a prismatic unbounded domain. // Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. Math. 2022. Vol. 42(1), P. 86-98. (Scopus IF=0.26).
4. Туракулов Х.Ш., Об одной полупериодической краевой задаче для модельного уравнения Трикоми в неограниченном параллелепипеде. // Бюллетень Института математики. 2022. №1. с.1-6.
5. Dzhamalov S.Z., Turakulov Kh.Sh and Sultanov M.S., On a nonlocal boundary value problem for a three-dimensional Tricomi equation in a prismatic unbounded domain. // Lobachevskii journal of mathematics. 2022. Vol. 43(11), P. 3104-3111**.** (Scopus. IF=0.378).
6. Джамалов С. З., Туракулов Х.Ш., Об одной линейной обратной задаче для трехмерного уравнения Трикоми с нелокальными краевыми условиями в призматической неограниченной области. // Бюллетень Института математики. 2022. № 6. с.72-82.
7. Turakulov Kh.Sh., On the smoothness of a semi-periodic boundary value problem for the three-dimensional Tricomi equation in the unlimited parallelepiped. // Uzbek Mathematical Journal. 2022. Vol. 66(4), P. 167-174.
8. *Джамалов С.З, Туракулов Х.Ш***.,** О гладкости периодической краевой задачи для трехмерного уравнения Трикоми в неограниченном параллелепипеде. // Научный вестник НамГУ. 2022. № 10. с.49-57
9. Dzhamalov S.Z., Turakulov Kh.Sh. and Kenjaev R. On a Semi-periodic Boundary Value Problem For The Three-dimensional Tricomi Equation In An Unbounded Parallelepiped. // AIP Conf. Proc. 2023. Vol. 2781, P. 358–362. (Scopus IF=0.164).
10. Туракулов Х.Ш., Об одной линейной обратной задаче с периодическими краевыми условиями для трехмерного уравнения Трикоми в неограниченном параллелепипеде. // Бюллетень Института математики. 2023. № 2. с.122-132.
11. Джамалов. С.З., Ашуров Р.Р., Туракулов Х.Ш. Об одной полунелокальной краевой задаче для трехмерного уравнения Трикоми в неограниченной призматической области. // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 32. №2. с.18-27.
12. Джамалов С.З., Туракулов Х.Ш. Об одной полунелокальной краевой задаче для модельнего уравнения Трикоми в призматической неограниченной области // Журнал Инновации нефти газовой отрасли. 2021. №2, с.41-50.