ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Мамажонов Санжарбек Мирзаевич
Доцент Кокандского университета, PhD

Аннотация. В работе для уравнения четвертого порядка с младшими членами рассмотрена одна краевая задача в прямоугольной области. Функция Грина построена для решения этой проблемы.

Ключевые слова. Функция Грина, кратные характеристики, краевая задача, детерминант.

Введение

Изучение многих задач по газовой динамике, теории упругости, теории пластин и оболочек приводится к рассмотрению в дифференциальных уравнениях в частных производных высоких порядков. С точки зрение физических приложению приставляют большой интерес и дифференциальные уравнения четвертого порядка (см. [1]-[4]). Книга Джураева Т.Д., Сопуева А. [5] посвящена классификаций дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка и решению краевых задач, для таких уравнений. В работах [6]-[11] изучены ряд корректных краевых задач для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками.

В работе [12], Аманов Д. и Мурзамбетова М.Б. рассмотрели задачу с краевыми условиями для неоднородного уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками с одним младшим членом.

Иргашев Б. Ю. [13] изучал краевую задачу для уравнения высокого порядка с кратными характеристиками методом построения функции Грина.

Постановка задачи

Рассмотрим следующее уравнение четвертого порядка вида

$$U_{xxxx} - U_{yy} + A_1 U_{xxx} + A_2 U_{xx} + A_3 U_x + A_4 U_y + A_5 U = 0,$$

где $A_i \in R, i = \overline{1,5}$. Заменой

$$U(x,y) = u(x,y)\exp\left(-\frac{A_1}{4}x + \frac{A_4}{2}y\right),$$

это уравнения можно привести к уравнению

$$u_{xxxx} + a_1 u_{xx} + a_2 u_x + a_3 u - u_{yy} = 0, \tag{1}$$

где $a_1 = A_2 - \frac{3A_1^2}{8}$, $a_2 = A_3 + \frac{A_1^3}{8} - \frac{A_1 A_2}{2}$, $a_3 = \frac{A_1^2 A_2}{16} - \frac{3A_1^4}{256} - \frac{A_1 A_3}{4} + \frac{A_4^2}{4} + A_5$.

Для уравнения (1) в области $\Omega = \{(x,y): 0 < x < p,\ 0 < y < q\}$ ставится следующая задача.

Задача A**.** Найти функцию $u(x,y)$ из класса $C_{x,y}^{4,2}(\Omega) \cap C_{x,y}^{3,1}(\overline{\Omega})$, удовлетворяющую в области Ω уравнению (1) и следующим краевым условиям:

$$u(x,0) = 0, u(x,q) = 0, 0 \le x \le p,$$

$$u(0,y)=\psi_1(y),\ u(p,y)=\psi_2(y),\ u_{xx}(0,y)=\psi_3(y),\ u_{xx}(p,y)=\psi_4(y),\ 0\le y\le q,$$

где $\psi_i(y)\in C^3[0,q],\ i=\overline{1,4}$ заданные функции, причем

$$\psi_i(0)=\psi_i(q)=\psi_i''(0)=\psi_i''(q)=0,\ \ i=\overline{1,4}.$$

В работах [14]-[25] изучены разнообразные краевые задачи и задачи для неоднородного уравнение (1), когда все коэффициенты постоянные и переменные.

Построение функции Грина

В этом тезисе мы подробно представляем процесс построения функции Грина для задачи

$$\begin{cases} V_n^{(4)}(x)+\lambda_n V_n(x)=0, \\ V_n(0)=V_n(p)=V_n''(0)=V_n''(p)=0, \end{cases} \tag{2}$$

которая используется для решения поставленной задачи.

Функция Грина $G_n(x,\xi)$, задачи (2), должна удовлетворять следующему уравнению и условиям:

$$\frac{\partial^4 G_n(x,\xi)}{\partial x^4}+a_{3n}G_n(x,\xi)=0 \tag{3}$$

$$G_{1n}(0,\xi)=G_{2n}(p,\xi)=G_{1nxx}(0,\xi)=G_{2nxx}(p,\xi)=0 \tag{4}$$

$$\begin{gathered} G_{2n}(\xi,\xi)-G_{1n}(\xi,\xi)=0;\ G_{2nx}(\xi,\xi)-G_{1nx}(\xi,\xi)=0 \\ G_{2nxx}(\xi,\xi)-G_{1nxx}(\xi,\xi)=0;\ G_{2nxxx}(\xi,\xi)-G_{1nxxx}(\xi,\xi)=1 \end{gathered} \tag{5}$$

Сформулируем и решим характеристическое уравнение уравнения (3) по x.

$$k^4+\lambda_n=0,\quad \Rightarrow\quad k^4=-\lambda_n=\lambda_n(\cos\pi+i\sin\pi),$$

$$k=\sqrt[4]{\lambda_n}\left(\cos\frac{\pi+2\pi z}{4}+i\sin\frac{\pi+2\pi z}{4}\right),\ z=0,1,2,3,$$

$$k_1=\sqrt[4]{\lambda_n}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\mu_n+i\mu_n,$$

$$k_2=\sqrt[4]{\lambda_n}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)=\mu_n-i\mu_n,$$

$$k_3=\sqrt[4]{\lambda_n}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=-\mu_n+i\mu_n,$$

$$k_4=\sqrt[4]{\lambda_n}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)=-\mu_n-i\mu_n,$$

где $\mu_n=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt[4]{\lambda_n}$. Общее решение уравнение (3) имеет вид

$$G_n(x,\xi)=C_1(\xi)\cos(\mu_n x)ch(\mu_n x)+C_2(\xi)\cos(\mu_n x)sh(\mu_n x)+$$
$$+C_3(\xi)\sin(\mu_n x)ch(\mu_n x)+C_4(\xi)\sin(\mu_n x)sh(\mu_n x).$$

Ищем функции Грина в следующем виде:

$$G_n(x,\xi)=\begin{cases} G_{1n}(x,\xi)=C_1(\xi)\cos(\mu_n x)ch(\mu_n x)+C_2(\xi)\cos(\mu_n x)sh(\mu_n x)+ \\ +C_3(\xi)\sin(\mu_n x)ch(\mu_n x)+C_4(\xi)\sin(\mu_n x)sh(\mu_n x),\ 0\le x\le\xi, \\ G_{2n}(x,\xi)=D_1(\xi)\cos(\mu_n(x-p))ch(\mu_n(x-p))+ \\ +D_2(\xi)\cos(\mu_n(x-p))sh(\mu_n(x-p))+ \\ +D_3(\xi)\sin(\mu_n(x-p))ch(\mu_n(x-p))+ \\ +D_4(\xi)\sin(\mu_n(x-p))sh(\mu_n(x-p)),\ \xi\le x\le p. \end{cases} \tag{6}$$

Находим производные 2-го порядка по переменной x:

$$\frac{G_{1nxx}}{2\mu_n^2}=-C_1\sin(\mu_n x)sh(\mu_n x)-C_2\sin(\mu_n x)ch(\mu_n x)+$$
$$+C_3\cos(\mu_n x)sh(\mu_n x)+C_4\cos(\mu_n x)ch(\mu_n x),$$
$$\frac{G_{2nxx}}{2\mu_n^2}=-D_1\sin(\mu_n(x-p))sh(\mu_n(x-p))-D_2\sin(\mu_n(x-p))ch(\mu_n(x-p))+$$
$$+D_3\cos(\mu_n(x-p))sh(\mu_n(x-p))+D_4\cos(\mu_n(x-p))ch(\mu_n(x-p)).$$

Поставим в условия (4).

$$G_{1n}(0,\xi)=C_1=0;\qquad G_{1nxx}(0,\xi)=C_4=0;\ G_{2n}(p,\xi)=D_1=0;$$
$$G_{2nxx}(p,\xi)=D_4=0.$$

Тогда функция Грина имеет следующий вид:

$$G_n(x,\xi)=\begin{cases} G_{1n}(x,\xi)=C_2\cos(\mu_n x)sh(\mu_n x)+C_3\sin(\mu_n x)ch(\mu_n x),\ 0\le x\le\xi; \\ G_{2n}(x,\xi)=D_2\cos(\mu_n(x-p))sh(\mu_n(x-p))+ \\ +D_3\sin(\mu_n(x-p))ch(\mu_n(x-p)),\ \xi\le x\le p. \end{cases}$$

Находим производные до 3-го порядка по переменной x:

$$G_{1nx}=-\mu_n C_2\left(\sin(\mu_n x)sh(\mu_n x)-\cos(\mu_n x)ch(\mu_n x)\right)+$$
$$+\mu_n C_3\left(\cos(\mu_n x)ch(\mu_n x)+\sin(\mu_n x)sh(\mu_n x)\right)$$
$$G_{2nx}=-\mu_n D_2\left(\sin(\mu_n(x-p))sh(\mu_n(x-p))-\cos(\mu_n(x-p))ch(\mu_n(x-p))\right)+$$
$$+\mu_n D_3\left(\cos(\mu_n(x-p))ch(\mu_n(x-p))+\sin(\mu_n(x-p))sh(\mu_n(x-p))\right)$$
$$G_{1nxx}=-2\mu_n^2C_2\sin(\mu_n x)ch(\mu_n x)+2\mu_n^2C_3\cos(\mu_n x)sh(\mu_n x)$$
$$G_{2nxx}=-2\mu_n^2D_2\sin(\mu_n(x-p))ch(\mu_n(x-p))+2\mu_n^2D_3\cos(\mu_n(x-p))sh(\mu_n(x-p))$$

$$G_{1nxxx}=-2\mu_n^3C_2\left(\cos(\mu_n x)ch(\mu_n x)+\sin(\mu_n x)sh(\mu_n x)\right)+$$
$$+2\mu_n^3C_3\left(-\sin(\mu_n x)sh(\mu_n x)+\cos(\mu_n x)ch(\mu_n x)\right)$$
$$G_{2nxxx}=-2\mu_n^3D_2\left(\cos(\mu_n(x-p))ch(\mu_n(x-p))+\sin(\mu_n(x-p))sh(\mu_n(x-p))\right)+$$
$$+2\mu_n^3D_3\left(-\sin(\mu_n(x-p))sh(\mu_n(x-p))+\cos(\mu_n(x-p))ch(\mu_n(x-p))\right)$$

Подставив в условия (5), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases}
D_2\cos(\mu_n(\xi-p))sh(\mu_n(\xi-p))+D_3\sin(\mu_n(\xi-p))ch(\mu_n(\xi-p))-\\
-C_2\cos(\mu_n\xi)sh(\mu_n\xi)-C_3\sin(\mu_n\xi)ch(\mu_n\xi)=0;\\
-D_2\left(\sin(\mu_n(\xi-p))sh(\mu_n(\xi-p))-\cos(\mu_n(\xi-p))ch(\mu_n(\xi-p))\right)+\\
+D_3\left(\cos(\mu_n(\xi-p))ch(\mu_n(\xi-p))+\sin(\mu_n(\xi-p))sh(\mu_n(\xi-p))\right)\\
+C_2\left(\sin(\mu_n\xi)sh(\mu_n\xi)-\cos(\mu_n\xi)ch(\mu_n\xi)\right)-\\
-C_3\left(\cos(\mu_n\xi)ch(\mu_n\xi)+\sin(\mu_n\xi)sh(\mu_n\xi)\right)=0;\\
-D_2\sin(\mu_n(\xi-p))ch(\mu_n(\xi-p))+D_3\cos(\mu_n(\xi-p))sh(\mu_n(\xi-p))+\\
+C_2\sin(\mu_n\xi)ch(\mu_n\xi)-C_3\cos(\mu_n\xi)sh(\mu_n\xi)=0;\\
-D_2\left(\cos(\mu_n(\xi-p))ch(\mu_n(\xi-p))+\sin(\mu_n(\xi-p))sh(\mu_n(\xi-p))\right)+\\
+D_3\left(-\sin(\mu_n(\xi-p))sh(\mu_n(\xi-p))+\cos(\mu_n(\xi-p))ch(\mu_n(\xi-p))\right)+\\
+C_2\left(\cos(\mu_n\xi)ch(\mu_n\xi)+\sin(\mu_n\xi)sh(\mu_n\xi)\right)-\\
-C_3\left(-\sin(\mu_n\xi)sh(\mu_n\xi)+\cos(\mu_n\xi)ch(\mu_n\xi)\right)=\dfrac{1}{2\mu_n^3}.
\end{cases}$$

Вычисляем главный определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix},$$

$$a_{11}=\cos(\mu_n(\xi-p))sh(\mu_n(\xi-p)),\qquad a_{12}=\sin(\mu_n(\xi-p))ch(\mu_n(\xi-p)),$$
$$a_{13}=-\cos(\mu_n\xi)sh(\mu_n\xi),\qquad a_{14}=-\sin(\mu_n\xi)ch(\mu_n\xi),$$
$$a_{21}=\cos(\mu_n(\xi-p))ch(\mu_n(\xi-p))-\sin(\mu_n(\xi-p))sh(\mu_n(\xi-p)),$$
$$a_{22}=\cos(\mu_n(\xi-p))ch(\mu_n(\xi-p))+\sin(\mu_n(\xi-p))sh(\mu_n(\xi-p)),$$
$$a_{23}=\sin(\mu_n\xi)sh(\mu_n\xi)-\cos(\mu_n\xi)ch(\mu_n\xi),$$
$$a_{24}=-\cos(\mu_n\xi)ch(\mu_n\xi)-\sin(\mu_n\xi)sh(\mu_n\xi),$$

$$a_{31}=-\sin\left(\mu_n(\xi-p)\right)ch\left(\mu_n(\xi-p)\right),\qquad a_{32}=\cos\left(\mu_n(\xi-p)\right)sh\left(\mu_n(\xi-p)\right),$$
$$a_{33}=\sin\left(\mu_n\xi\right)ch\left(\mu_n\xi\right),\qquad a_{34}=-\cos\left(\mu_n\xi\right)sh\left(\mu_n\xi\right),$$
$$a_{41}=-\cos\left(\mu_n(\xi-p)\right)ch\left(\mu_n(\xi-p)\right)-\sin\left(\mu_n(\xi-p)\right)sh\left(\mu_n(\xi-p)\right),$$
$$a_{42}=\cos\left(\mu_n(\xi-p)\right)ch\left(\mu_n(\xi-p)\right)-\sin\left(\mu_n(\xi-p)\right)sh\left(\mu_n(\xi-p)\right),$$
$$a_{43}=\cos\left(\mu_n\xi\right)ch\left(\mu_n\xi\right)+\sin\left(\mu_n\xi\right)sh\left(\mu_n\xi\right),$$
$$a_{44}=\sin\left(\mu_n\xi\right)sh\left(\mu_n\xi\right)-\cos\left(\mu_n\xi\right)ch\left(\mu_n\xi\right),$$
$$\Delta=\cos\left(2\mu_n p\right)-ch\left(2\mu_n p\right).$$

Определитель запишем в следующем виде:

$$\Delta=-e^{2\mu_n p}\bar{\Delta},$$

где

$$\bar{\Delta}=\frac{1+e^{-4\mu_n p}}{2}-\cos\left(2\mu_n p\right)e^{-2\mu_n p}.$$

Предположим

$$\bar{\Delta}=\frac{1+e^{-4\mu_n p}}{2}-\cos\left(2\mu_n p\right)e^{-2\mu_n p}=0,$$

и имеем

$$2\cos\left(2\mu_n p\right)=e^{2\mu_n p}+e^{-2\mu_n p}.$$

Но система неравенств

$$\begin{cases} e^{2\mu_n p}+e^{-2\mu_n p}>2, \\ 2\cos\left(2\mu_n p\right)\le 2, \end{cases}$$

не имеет решения. Отсюда $\bar{\Delta}>0$, и так $\Delta\neq 0$.

С помощью формулы Крамера находим все коэффициенты:

$$C_2=\frac{1}{2\mu_n^3\Delta}\left(\begin{array}{l}\cos\left(\mu_n p\right)sh\left(\mu_n p\right)\left(\cos\left(\mu_n(\xi-p)\right)sh\left(\mu_n(\xi-p)\right)-\sin\left(\mu_n(\xi-p)\right)ch\left(\mu_n(\xi-p)\right)\right)+\\ +\sin\left(\mu_n p\right)ch\left(\mu_n p\right)\left(\cos\left(\mu_n(\xi-p)\right)sh\left(\mu_n(\xi-p)\right)+\sin\left(\mu_n(\xi-p)\right)ch\left(\mu_n(\xi-p)\right)\right)\end{array}\right),$$

$$C_3=\frac{1}{2\mu_n^3\Delta}\left(\begin{array}{l}\sin\left(\mu_n p\right)ch\left(\mu_n p\right)\left(\cos\left(\mu_n(\xi-p)\right)sh\left(\mu_n(\xi-p)\right)-\sin\left(\mu_n(\xi-p)\right)ch\left(\mu_n(\xi-p)\right)\right)-\\ -\cos\left(\mu_n p\right)sh\left(\mu_n p\right)\left(\cos\left(\mu_n(\xi-p)\right)sh\left(\mu_n(\xi-p)\right)+\sin\left(\mu_n(\xi-p)\right)ch\left(\mu_n(\xi-p)\right)\right)\end{array}\right),$$

$$D_2=\frac{1}{2\mu_n^3\Delta}\left(\begin{array}{l}\cos\left(\mu_n p\right)sh\left(\mu_n p\right)\left(\cos\left(\mu_n\xi\right)sh\left(\mu_n\xi\right)-\sin\left(\mu_n\xi\right)ch\left(\mu_n\xi\right)\right)+\\ +\sin\left(\mu_n p\right)ch\left(\mu_n p\right)\left(\cos\left(\mu_n\xi\right)sh\left(\mu_n\xi\right)+\sin\left(\mu_n\xi\right)ch\left(\mu_n\xi\right)\right)\end{array}\right),$$

$$D_3=\frac{1}{2\mu_n^3\Delta}\left(\begin{array}{l}\sin\left(\mu_n p\right)ch\left(\mu_n p\right)\left(\cos\left(\mu_n\xi\right)sh\left(\mu_n\xi\right)-\sin\left(\mu_n\xi\right)ch\left(\mu_n\xi\right)\right)-\\ -\cos\left(\mu_n p\right)sh\left(\mu_n p\right)\left(\cos\left(\mu_n\xi\right)sh\left(\mu_n\xi\right)+\sin\left(\mu_n\xi\right)ch\left(\mu_n\xi\right)\right)\end{array}\right).$$

Мы нашли функция Грина в следующим виде:

$$G_n(x,\xi)=\begin{cases}G_n^1(x,\xi),\ 0\le x<\xi,\\ G_n^2(x,\xi),\xi<x\le p,\end{cases}$$

где

$$G_n^1(x,\xi)=\frac{1}{2\mu_n^3\Delta}\Big\{\Big[\cos(\mu_n p)sh(\mu_n p)\big(\cos(\mu_n(\xi-p))sh(\mu_n(\xi-p))-$$
$$-\sin(\mu_n(\xi-p))ch(\mu_n(\xi-p))\big)+\sin(\mu_n p)ch(\mu_n p)\times$$
$$\times\big(\cos(\mu_n(\xi-p))sh(\mu_n(\xi-p))+\sin(\mu_n(\xi-p))ch(\mu_n(\xi-p))\big)\Big]\times$$
$$\times\cos(\mu_n x)sh(\mu_n x)+\Big[\sin(\mu_n p)ch(\mu_n p)\big(\cos(\mu_n(\xi-p))sh(\mu_n(\xi-p))-$$
$$-\sin(\mu_n(\xi-p))ch(\mu_n(\xi-p))\big)-\cos(\mu_n p)sh(\mu_n p)\times$$
$$\times\big(\cos(\mu_n(\xi-p))sh(\mu_n(\xi-p))-\sin(\mu_n(\xi-p))ch(\mu_n(\xi-p))\big)\Big]\sin(\mu_n x)ch(\mu_n x)\Big\},$$

$$G_n^2(x,\xi)=\frac{1}{2\mu_n^3\Delta}\Big\{\Big[\cos(\mu_n p)sh(\mu_n p)\big(\cos(\mu_n\xi)sh(\mu_n\xi)-\sin(\mu_n\xi)ch(\mu_n\xi)\big)+$$
$$+\sin(\mu_n p)ch(\mu_n p)\big(\cos(\mu_n\xi)sh(\mu_n\xi)+\sin(\mu_n\xi)ch(\mu_n\xi)\big)\Big]\times$$
$$\times\cos(\mu_n(x-p))sh(\mu_n(x-p))+\Big[\sin(\mu_n p)ch(\mu_n p)\big(\cos(\mu_n\xi)sh(\mu_n\xi)-$$
$$-\sin(\mu_n\xi)ch(\mu_n\xi)\big)-\cos(\mu_n p)sh(\mu_n p)\big(\cos(\mu_n\xi)sh(\mu_n\xi)+$$
$$+\sin(\mu_n\xi)ch(\mu_n\xi)\big)\Big]\sin(\mu_n(x-p))ch(\mu_n(x-p))\Big\}.$$

Заключение.

При решении задачи A, после разделения переменных получаются две задачи для переменных x и y. Для переменной y находятся собственные функции. А для переменной x задача решается с использованием функции Грина, что приводит к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Решив это уравнение, можно единственным образом найти решение задачи A.

Литература:

1. Турбин М.В. Исследование начально-краевой задачи для модели движения жидкости Гершел - Балкли // Вест. Воронеж. Гос. Ун-та. Сер. Физ. Мат. 2013. № 2. - С. 246-257.
2. Уизем Дж. Линейние и нелинейные волны.-М.: Мир,1977.
3. Шабров С.А. Об оценках функций влияния одной математической модели четвертого порядка // Вест. Воронеж. Гос. Ун-та. Сер. Физ. Мат. 2015. № 2. - С. 168-179.
4. Benney D.J., Luke J.C. Interactions of permanent waves of finite amplitude // J. Math. Phys. 1964. 43. P.309-313.
5. Т.Д.Джураев, А.Сопуев. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. Ташкент. «Фан». 2000 год.
6. Джураев Т.Д, Апаков Ю.П. К теории уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, содержащего вторую производную по времени // Украинский математический журнал. – Киев, 2010, том 62. № 1.- С. 40-51.

7. Apakov Yu.P., Rutkauskas S. On a boundary problem to third order PDE with multiple characteristics // Nonlinear Analysis: Modeling and Control. -Vilnius, 2011. -Vol. 16. - № 3.- pp. 255-269.

8. Apakov Yu.P. On the solution of a boundary-value problem for a third- order equation with multiple characteristics // Ukrainian Mathematical Journal. Springer, New York, June, 2012 –Vol. 64, № 1. –P. 1-11.

9. Apakov Yu.P. Irgashev B.Yu.Boundary-value problem for a degenerate high-odd-order equation. Ukrainian Mathematical Journal. Springer, New York, June, 2015 -Vol. 66, № 10. -P. 1475-1488.

10. Apakov Yu.P., A. Kh. Zhuraev. Third boundary-value problem for a third-order diferential equation with multiple characteristics// Ukrainian Math-ematical Journal. Springer, New York, febuary, 2019 -Vol. 70, № 9. -P. 1467-1476.

11. Apakov Yu.P. On Unique Solvability of Boundary-Value Problem for a Viscous Transonic Equation // Lobachevski Journal of Mathematics.2020 Vol, 41, № 9, -pp. 1754-1761.

12. Аманов Д., Мурзамбетова М. Б. Краевая задача для уравнения четвертого порядка с младшим членом, Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки, 2013, выпуск 1, 3–10

13. Иргашев Б. Ю. Краевая задача для одного вырождающегося уравнения высокого порядка с младшими членами. Бюллетень Института математики 2019, №6, стр.23-30.

14. Apakov, Yu.P., Mamajonov, S.M. Boundary Value Problem for Fourth Order Inhomogeneous Equation with Variable Coefficients. Journal of Mathematical Sciences. – 2024, – 1-13.

15. Mamajonov, S.M. On the formulation and study of a boundary value problem for a fourth-order equation of parabolic-hyperbolic type in a pentagonal domain. Journal of Applied Science and Social Science. – 2024, – 14(06), – 79-86.

16. Apakov, Yu.P., Mamazhonov, S.M. Boundary Value Problem for an Inhomogeneous Fourth-Order Equation with Lower-Order Terms. Differential Equations. – 2023, – 2, – 188-198.

17. Apakov, Yu.P., Mamazhonov, S.M. Solvability of a Boundary Value Problem for a Fourth Order Equation of Parabolic-Hyperbolic Type in a Pentagonal Domain. Journal of Applied and Industrial Mathematics. – 2021, – 15(4), – 586-596.

18. Apakov, Yu.P., Mamazhonov, S.M. Boundary value problem for a inhomogeneous fourth order equation with constant coefficients. Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. – 2023, – 8(2), – 157-172.

19. Apakov, Yu.P., Mamazhonov, S.M. Boundary value problem for a fourth-order equation of parabolic-hyperbolic type with multiple characteristics, whose slopes are greater than one. Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika. – 2022, – 4, – 3-14.

20. Mamajonov, M., Mamajonov, S.M. Statement and research method some boundary value problems for a class of fourth order parabolic-hyperbolic type. Vestnik KRAUNC. Fiziko-Matematicheskie Nauki. –2014, –1, –14-19.

21. Mamajonov, S.M. The third boundary problem for a fourth-order non-homogeneous equation with constant coefficients. Bull. Inst. Math. – 2022, – 5(6), – 100-109.

22. Ю. П. Апаков, С. М. Мамажонов, Краевая задача для неоднородного уравнения четвёртого порядка с постоянными коэффициентами, Челяб. физ.-матем. журн., – 2023, – 8(2), – 157–172.

23. Apakov, Y.P., Mamajonov, S.M. Boundary Value Problem for a Fourth-Order Equation of the Parabolic-Hyperbolic Type with Multiple Characteristics with Slopes Greater Than One. *Russ Math.*, – 2022, – 66, 1-11.

24. Apakov, Y.P., Mamajonov, S.M. Boundary Value Problem for Fourth Order Inhomogeneous Equation with Variable Coefficients. *J Math Sci*, – 2024, – 284, – 153-165.

25. Mamajonov, S. M. "Karrali xarakteristikali bir jinsli boʻlmagan toʻrtinchi tartibli tenglama uchun ikkinchi chegaraviy masalani yechish." *Namangan davlat universiteti Ilmiy axborotnomasi*, – 2023, – 7, – 70-81.