ОБ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ С ПОЛУПЕРИОДИЧЕСКЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ТРЁХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТРИКОМИ В НЕОГРАНИЧЕННОМ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЕ

[1]Туракулов Хамидулло Шамсидинович, [1]Мадалиев Акмалжон Махаммаджонович, [2]Собиров Авазбек Абдурашидович

[1] Коканский университет. (PhD) доцент кафедры «Цифровые технологии и математика»

[2] Магистр Кокандского государственного педагогического института

Аннотация: В данной статье рассматриваются вопросы корректности одной линейной обратной задачи для трехмерного уравнения Трикоми в неограниченном паралилепипеде.

Для доказательства единственности обобщённого решения используется метод интегралов энергии. Для доказательства существования обобщённого решения сначала используется преобразование Фурье и в результате получается новая задача на плоскости, а для разрешимости этой задачи используется методы "ε -регуляризации" и априорных оценок. Используя эти методы, и равенство Парсеваля, докажем единственность, существование и гладкость обобщённого решения одной нелокальной краевой задачи периодического типа для трехмерного уравнения смешанного типа первого рода второго порядка.

Ключевые слова: обобщенная решение, модельное уравнения Трикоми, полупериодическая краевая задача, преобразование Фурье, методы “ регуляризации” и априорных оценок.

В процессе исследования нелокальных задач была выявлена тесная взаимосвязь задач с нелокальными краевыми условиями и обратными задачами. К настоящему времени достаточно хорошо изучены обратные задачи для классических уравнений таких как, параболических, эллиптических и гиперболических типов. [1,2]. Для уравнений смешанного типа, как первого, так и второго рода в ограниченных областях изучено в работах. [4].

В неограниченых областях прямые задачи с нелокалными краевыми условиями изучены в работах [1-3], а обратные задачи с нелокальными краевыми условиями изучены в работах [3,4]. Используя результаты этих работ, в данной работе, для исследования однозначное разрешимости обратных задач для трехмерного уравнения Трикоми в неограниченном паралилепипеде предлагается метод, который основан на сведение обратной задачи к прямым полупериодическим краевым задачам для семейство нагруженных интегро-дифференциальных уравнений Трикоми в ограниченной прямоугольной области.

В области

$$G=(-1,1)\times(0,T)\times R=Q\times R=\{(x,t,z);x\in(-1,1),0<t<T<+\infty,z\in R.\}$$

рассмотрим трехмерное уравнение Трикоми:

$$Lu = xu_{tt} - \Delta u + a(x,t)u_t + b(x,t)u = \psi(x,t,z), \qquad (1)$$

где $\Delta u = u_{xx} + u_{zz}$ - оператор Лапласа. Здесь $\psi(x,t,z) = g(x,t,z) + h(x,t)\cdot f(x,t,z)$, $g(x,t,z)$ и $f(x,t,z)$ -заданные функции, а функция $h(x,t)$ подлежит определению.

Линейная обратная задача. Найти функции ($u(x,t,z), h(x,t)$) удовлетворяющие уравнению (1) в области G, такие что, функция $u(x,t,z)$ удовлетворяет следующим полупериодическими краевым условиям

$$D_t^p u\big|_{t=0} = D_t^p u\big|_{t=T}, \qquad (2)$$

$$u\big|_{x=-1} = u\big|_{x=1} = 0 \qquad (3)$$

при $p = 0,1$, где $D_t^p u = \dfrac{\partial^p u}{\partial t^p}$, $D_t^0 u = u.$

Далее будем считать, что $u(x,t,z)$ и $u_z(x,t,z) \to 0$ при $|z| \to \infty$, $u(x,t,z)$ абсолютно интегрируема по z на R при любом (x,t) в $\overline{Q}$ (4)

с дополнительным условием

$$u(x,t,\ell_0) = \varphi_0(x,t), \text{ где } \ell_0 \in R \qquad (5)$$

и с функций $h(x,t)$ принадлежит классу

$$U = \left\{(u,h)\,\big|\; u \in W_2^{2,3}(G); h \in W_2^2(Q)\right\}$$

Здесь $W_2^{2,3}(G)$ Банахово пространство с нормой

$$\|u\|^2_{W_2^{2,3}(G)} = (2\pi)^{-1/2}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}(1+|\lambda|^2)^3\cdot\|\hat{u}(x,t,\lambda)\|^2_{W_2^2(Q)}\,d\lambda,$$

где $W_2^2(Q) -$ пространство Соболева с нормой

$$\|\vartheta\|_2^2 = \|\vartheta\|^2_{W_2^l(Q)} = \sum_{|\alpha|\le 2}\int_Q \left|D^\alpha \vartheta\right|^2 dxdt.$$

Здесь $\alpha -$мультииндекс, $D^\alpha -$ обобщённая производная по переменным x и t,

$$\hat{u}(x,t,\lambda) = (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t,z)e^{-i\lambda z}dz$$

преобразование Фурье по переменной z, функции $u(x,t,z)$.

Определение 1. Обобщённым решением задачи (1)-(5) будем называть функцию $u(x,t,z) \in U$, удовлетворяющую уравнению (1) почти всюду с условиями (2)-(5).

Пусть все коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие функции в области G, и пусть выполнены следующие условия относительно коэффициентов, правой части и заданной функции $\varphi_0(x,t)$;

Условие 1:

периодичность: $a(x,0)=a(x,T);\ c(x,0)=c(x,T).$

периодически условие: $g(x,0,z)=g(x,T,z),\quad f(x,0,z)=f(x,T,z),$

гладкость: $f(x,t,l_0)=f_0(x,t)\in C^{0,1}_{x,t}(Q),\ |f_0(x,t)|\ge\eta>0;\ f\in W_2^{3,3}(G),\ g\in W_2^{1,3}(G).$

Условие 2: $\varphi_0(x,t)\in W_2^3(Q);\ D_t^q\,\varphi_0\big|_{t=0}=D_t^q\,\varphi_0\big|_{t=T},\ q=0,1,2;\ \varphi_0\big|_{x=-1}=\varphi_0\big|_{x=1}=0$

Однозначное разрешимость задачи (1)-(5) докажем с помощью преобразованием Фурье, т.е для нахождение решение задачи (1)-(5), применяем преобразование Фурье по переменной z, для задачи (1)-(5).

Для того чтобы сформулировать основной результат, необходимо выполнить некоторые формальности построения.

Рассмотрим следы уравнения (1) при $z=\ell_0$:

$$Lu(x,t,\ell_0)=xu_{tt}(x,t,\ell_0)-u_{xx}(x,t,\ell_0)-u_{zz}(x,t,\ell_0)+$$
$$+a(x,t)u_t(x,t,\ell_0)+c(x,t)u(x,t,\ell_0)=\psi(x,t,\ell_0).$$

Теперь, учитывая условие (5) и то, что $f_0\neq 0$, определим формально неизвестную функцию $h(x,t)$ в виде интеграла

$$h(x,t)=\frac{1}{f_0(x,t)}[\Phi_0+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda^2e^{i\lambda\ell_0}\hat{u}(x,t,\lambda)d\lambda]$$

где $\Phi_0=L_0\varphi_0-g_0;\ L_0\varphi_0=x\varphi_{0tt}-\varphi_{0xx}+a(x,t)\varphi_{0t}+b(x,t)\varphi_0,$ а для определения функций $\hat{u}(x,t,\lambda),$ в области $Q=(-1,1)\times(0,T)$ получим нагруженных интегро-дифференциальных уравнений Трикоми:

$$L\hat{u}=x\hat{u}_{tt}-\hat{u}_{xx}+a(x,t)\hat{u}_t+(b(x,t)+\lambda^2)\hat{u}=\hat{g}(x,t,\lambda)+$$
$$+\frac{\hat{f}(x,t,\lambda)}{f_0(x,t)}[\Phi_0+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\xi^2e^{i\xi\ell_0}\hat{u}(x,t,\xi)d\xi]\equiv\hat{F}(\hat{u}), \tag{6}$$

с полупериодическими краевыми условиями:

$$D_t^p\,\hat{u}\big|_{t=0}=D_t^p\,\hat{u}\big|_{t=T};\ p=0,1 \tag{7}$$

$$\hat{u}\big|_{x=-1}=\hat{u}\big|_{x=1}=0 \tag{8}$$

где, $\lambda\in R=(-\infty,\infty),$

$$\hat{f}(x,t,\lambda)=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t,z)e^{-i\lambda z}dz$$

-преобразование Фурье по переменной z, функции $f(x,t,z)$.

Основными результатом является

Теорема 1(Основной результат). Пусть выполнены вышеуказанные условия 1 и 2 для коэффициентов уравнение (1), кроме того пусть существует положительное число μ, т.ч, $2a(x,t)-\mu x\geq B_1>0,\ \ b_t(x,t)+\mu b(x,t)\geq b_2>0,\ \ a_t\leq 0,$ для всех $(x,t)\in\overline{Q},$ и пусть существует положительные числа $\sigma, c(\sigma^{-1})-$ (коэффициенты неравенство Коши) такие, что для $b_0=\min\{B_1,\mu,b_2\}$ где $c(\sigma^{-1})=14\mu^2\sigma^{-1}>0,$ имеют оценки $b_0-c(\sigma^{-1})=\delta>0;$

$$M\|f\|^2_{W_2^{3,3}(G)}\leq\frac{1}{2},\qquad M=const(\sigma m\delta^{-1}\eta^{-2}\|f_0\|_{C^{0,1}_{x,t}(Q)})$$

$$m=10c_1c_2c_3,\quad c_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\lambda^4 d\lambda}{(1+|\lambda|^2)^3}<+\infty,\ c_i(i=2,3)-$$

коэффициенты теоремы вложения Соболева.

Тогда функции

$$u(x,t,z)=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{u}(x,t,\lambda)e^{i\lambda z}d\lambda, \tag{9}$$

$$h(x,t)=\frac{1}{f_0(x,t)}[\Phi_0+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda^2 e^{i\lambda\ell_0}\hat{u}(x,t,\lambda)d\lambda] \tag{10}$$

являются единственным решением линейной обратной задачи (1)-(5) из указанного класса U.

Библиографический список:

1. Аниканов Ю.Е. Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений. Новосибирск. Наука, 1978.-120с
2. Джамалов С.З. Нелокальные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа. // Монография. Ташкент.2021г, с.176.
3. S.Z.Dzhamalov, R.R.Ashurov, Kh.Sh. Turakulov. The Linear Inverse Problem for the Three-Dimensional Tricomi Equation in a Prismatic Unbounded Domain. // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2021, 42(15), pp. 3606–3615.
4. S.Z.Dzhamalov, M.G.Aliev, Kh.Sh. Turakulov. On a linear inverse problem for the three-dimensional Tricomi equation with nonlocal boundary conditions of periodic type in a prismatic unbounded domain. // Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. Math. 2022, (42) (1), pp.1-12.